

**厦门大学《线性代数I》课程期末试卷**

**学院＿＿＿＿年级＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿**

**主考教师： 试卷类型：（A卷） 2017.6.6**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |
| 评阅人 |  |

**一．填空题（每小题4分，共20分）：**

**1．设** A =[A1,A2,A3], B =[A1,A2,B3]**均为3阶矩阵, 若 |**A**| = -2，**

**|**B**| = 3，则行列式 |**2A+3B**| = 125 .**

**2. 令** A **=, 则** A**的初等矩阵的乘积表示式为  .**

**3．设**A **=，且齐次线性方程组**AX **= 0有非零解，则** *k* **的取值为 .**

**4．***n***阶矩阵**A**不能对角化的充分必要条件是 矩阵A没有n个线性无关的特征向量 .**

**5. 为正定矩阵的充分必要条件是 **

|  |  |
| --- | --- |
| **得 分** |  |
| **评阅人** |  |

**二．单项选择题(每小题各3分，共15分)：**

**1．设**A, B **均为n（>1）阶初等矩阵，**E**表示n阶单位矩阵，则 (3) .**

**(1)** A+B **为n阶初等矩阵 (2)** AB**为n阶初等矩阵**

**(3) 为2n阶初等矩阵 (4) 为2n阶初等矩阵**

**2.设3阶矩阵**A**= ，若**A**的伴随矩阵的秩为1，则必有 (1) 。**

（1）*ab*且*a+*2*b =* 0（2）*ab*且*a*+2*b*0

（3）*a = b*或*a+*2*b* = 0（4）*a = b*或*a*+2*b*0

**3.设向量组（I）：,,┅，可由向量组（II）：,,┅， 线性表示，则 (2) .**

**（1）当t>s时,向量组（I）线性相关 （2）当s>t时,向量组（I）线性相关**

**（3）当s>t时，向量组（II）线性相关 （4）当t>s时,向量组（II）线性相关**

**4. 设3阶矩阵A的特征值为1,0,-1, 则 (4) .**

**(1)** A**是可逆矩阵 (2)** A**是对角矩阵 (3)** A **是对称矩阵 (4)** A **可对角化**

**5. 设***n***阶矩阵**A**合同于对角矩阵，则必有 (1) .**

**(1)** A**为对称矩阵 (2)** A**为正定矩阵**

**(3)  (4)  均是**A**的特征值**

**三. （13分）.求矩阵的特征值与特征向量.**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |
| 评阅人 |  |

**解 因为A的特征多项式为**

****

**故矩阵A的特征值为—5分**

**对于解线性方程组得一个基础解系从而A的对应于特征值的全部特征向量为—4分**

**对于，解线性方程组得一个基础解系，从而A的对应于特征值的全部特征向量为—4分**

|  |  |
| --- | --- |
| **得 分** |  |
| **阅卷人** |  |

**四．（16分）令=[1,1,***a***]**,=[1,** *a***,1]**,=[** *a***,1,1]*,***

**=[2,** *a* **+1,-1]**. 问***a***为何值时,**

**（1）向量 不能由向量组 ,, 线性表示；**

**（2）向量 能由向量组 ,, 线性表示， 且表示法惟一；**

**（3）向量 能由向量组 ,, 线性表示，且表示法不惟一，并求其一般表示式.**

**解 令，对增广矩阵做行初等变换，有**

**，—4分**

**（1）当**时，**线性方程组有唯一解，此时向量 能由向量组 ,, 线性表示， 且表示法惟一；—4分**

**（2）当**时，

****

** 无解，向量 不能由向量组 ,, 线性表示；—4分**

**（3）当**时，

**，**

**此时 有无穷多解，此时向量 能由向量组 ,, 线性表示， 且表示法不惟一.**

**的同解线性方程组为，因此的通解为，其中c为任意常数.**

**,其中c为任意常数. —4分**

|  |  |
| --- | --- |
| **得 分** |  |
| **评阅人** |  |

**五（14分） 求4元齐次线性方程组的解空间V的一个规范正交基.**

**解** 对系数矩阵做行初等变换有

，**—4分**

因此线性方程组的同解方程组为**，**

**由此可得解空间V的一个基为**  **—4分**

正交化可得， ，**—4分**

**单位化：**，便是所求的一组规范正交基. **—2分**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |
| 评阅人 |  |

**六（12分）. 求一个可逆线性替换，将3元二次型**

** 化为规范形.**

**解  —4分**

**，—4分**

**令**，即，令，**—2分**

**变换,则得该二次性的规范形为—2分**

|  |  |
| --- | --- |
| 得 分 |  |
| 评阅人 |  |

**七.** **(10分) 设**A**为*n*阶矩阵. 证明：**

**（1）若**A**为可逆矩阵，则**A**的特征值均不为零；**

**（2）若**A**是实对称矩阵，则**A**为可逆矩阵的充分必要条件是存在一个n阶实矩阵**B**，使得**AB+BA**是正定矩阵.**

**证明** （1）根据矩阵行列式和特征值之间的关系有

**,—3分**

**其中为矩阵*A*的特征值。矩阵*A*为可逆矩阵，因此，因此数均不为零，结论成立. —2分**

**（2）必要性 如果对称矩阵**A**是可逆矩阵，则**A**的特征值均不为零，令**B=A**,则**

AB+BA=AA+AA=2A

为实对称矩阵，而且它的特征值为**均大于零，**

**因此**AB+BA是正定矩阵. **—3分**

充分性（反证法）假设矩阵A不可逆，即 **，令是A的一个特征值，X是该特征值所对应的一个特征向量，即，且，此时**

，

这与AB+BA是正定矩阵矛盾，因此矩阵A可逆. **—2分**